TD 3 : Projecteurs et symétries (Indications)

Indications pour l'exercice 1 :

1. Le sens direct découle de la définition, il suffit de calculer $p^2(x)$. Penser ensuite à écrire $x = x - p(x) + p(x)$ pour tout vecteur x de E pour le sens réciproque.
2. Utiliser le fait que si p est un projecteur, alors c'est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
3. Le sens direct découle de la définition, il suffit de calculer $s^2(x)$. Penser ensuite à écrire $x = \frac{1}{2}(x - s(x)) + \frac{1}{2}(x + s(x))$ pour tout vecteur x de E pour le sens réciproque.

Indications pour l'exercice 2 :

1. Utiliser la caractérisation $p^2 = p$ et les propriétés des projecteurs.
2. Utiliser la caractérisation $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et les propriétés des symétries.

Indications pour l'exercice 3 :

On peut montrer par récurrence que pour tout entier p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \geq n - p$ si $(H_1, ..., H_{n-1})$ est une famille d'hyperplans.

Indications pour l'exercice 4 :

1. Raisonner par double inclusion, revenir aux définitions.
2. Utiliser la caractérisation :

$$f(E_1)+\cdots+f(E_n) = f(E_1)\oplus\cdots\oplus f(E_n) \iff \forall(y_1,...,y_n) \in f(E_1)\times\cdots\times f(E_n), y_1+\cdots+y_n = 0 \Rightarrow y_1 = \cdots = y_n = 0$$

3. Rappel : $x \in f^{-1}(A) \iff f(x) \in A$.
4. Trouver par exemple deux droites vectorielles F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^2$ en somme directe et une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f^{-1}(F_1) = \{0\}$ et $f^{-1}(F_2) = \{0\}$.

Indications pour l'exercice 5 :

1. Raisonner par analyse synthèse pour montrer que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G.
2. Utiliser la décomposition trouvée à la question précédente pour exprimer directement $p(f)$ en fonction de f.

Indications pour l'exercice 6 :

1. Raisonner par analyse synthèse pour montrer que tout vecteur de E s'écrit comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
2. Utiliser la décomposition trouvée à la question précédente pour exprimer directement $s(x, y, z)$ en fonction de (x, y, z).

Indications pour l'exercice 7 :

1. (a) F est l'ensemble des solutions d'un sytème d'1 équation à $2n$ inconnues.
   (b) La réponse précédente peut donner la réponse, sinon on peut voir F aussi comme noyau d'une application linéaire, ou bien encore écrire directement une base de F.
2. Montrer que F et G sont en somme directe puis raisonner sur les dimensions.
3. Décomposer x dans $F \oplus G$ par analyse-synthèse, les réponses à 3a) et 3b) sont ensuite immédiates en appliquant les définitions.

Indications pour l'exercice 8 :

1. Comme d'habitude une analyse-synthèse fera l'affaire
2. Reprendre la décomposition de la question précédente.

Indications pour l'exercice 9 :

1. Routine
2. Montrer que la somme est directe et utiliser la formule de Grassmann pour montrer l'égalité des dimensions. Pour déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$ on peut par exemple montrer que u est surjective.

Indications pour l'exercice 10 :

Rappel : F est stable par u si pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.
Remarque : $u(x) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \iff s(u(x)) = u(x)$.

Indications pour l'exercice 11 :

Choisir une base de E dans laquelle la matrice représentative de s est diagonale.

Indications pour l'exercice 12 :

1. Utiliser la caractérisation $r^2 = r$ en remarquant que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q) \iff q \circ p = 0$
2. Raisonner par double implication en utilisant bien toutes les hypothèses. Comme r est un projecteur, montrer que $x \in \mathrm{Im}(r)$ revient à montrer que $r(x) = x$.

Indications pour l'exercice 13 :

1. Le théorème du rang suffit.
2. L'hypothèse « $g \circ f$ est de rang p » et le résultat de la question précédente suffisent pour obtenir l'égalité des dimensions dans la première égalité. La deuxième vient ensuite immédiatement grâce au théorème du rang.
3. Utiliser le fait que pour un projecteur q, $x \in \mathrm{Im}(q) \iff q(x) = x$.
4. Utiliser le résultat précédent et l'injectivité de g.

Indications pour l'exercice 14 :

1. Développer en utilisant $a^2 = b^2 = \mathrm{Id}_E$. Attention : $a \circ b \neq b \circ a$ a priori.
2. La question précédente donne un lien entre $(a+b) \circ (a-b)$, $(a-b) \circ (a+b)$ et $(a \circ b - b \circ a)$.
3. Attention : si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) \iff \exists x_1, x_2 \in E$, $y = f(x_1)$ et $y = g(x_2)$.

Indications pour l'exercice 15 :

1. Pour déterminer $s(s(P(X))$, poser $Q(X) = s(P(X)) = P(1-X)$ puis écrire $s(Q(X)) = Q(1-X)$.
2. La courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si $f(a-x) = f(a+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et que $g : x \mapsto f(x+a)$, alors la courbe représentative de g dans un repère $(O, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$ est le translaté de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $-a\,\overrightarrow{\mathrm{i}}$.
4. Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
5. Un automorphisme envoie une base de E sur une base de E.
   L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui définissent des fonctions paires est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ dont une base est $(1, X^2, X^4, \ldots, X^{2E(n/2)})$.
6. Montrer de la même façon que $P(1-X) = -P(X) \iff P(X + \frac{1}{2})$ définit une fonction impaire, la suite est très similaire au cas précédent.

Indications pour l'exercice 16 :

1. Routine
2. Attention il ne suffit pas de montrer que $Spec(s) \subset \{-1, 1\}$.

3. Pour le sens $\Rightarrow$, utiliser la caractérisation $x \in E_1 \iff s(x) = x$ et $x \in E_{-1} \iff s(x) = -x$.
   Il suffit de décomposer les vecteurs de E dans $E_1 \oplus E_2$ pour obtenir les égalité voulues pour le sens $\Leftarrow$.
4. Pour tout $x \in E$, $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{2}(s(f(x)) + f(s(x)) = \lambda f(x)$.
5. Si f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ, alors $f \neq 0$ donc il existe un vecteur x appartenant à E_1 ou à E_2 tel que $f(x) \neq 0$. $f(x)$ est alors un vecteur propre de s d'après le résultat de la question précédente.
6. Si P est un polynôme annulateur de φ, toute valeur propre de φ est une racine de P. Faire l'essai avec un polynôme de degré 3 qui satisfait cette condition.